

Краткое изложение материалов лекционного курса
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ,
относящихся к задачам **линейного программирования,**
лектор проф. М. М. Потапов

Общая задача линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \in R^n \mid Au = b, Du \leq f\}.$$

Каноническая задача линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \in R^n \mid Au = b, u \geq 0\}. \quad (1)$$

Любую общую задачу ЛП можно свести к канонической, правда, ценой значительного увеличения размерности. Справедлива

Теорема 1. *В канонических задачах линейного программирования 1) если допустимое множество U непусто, то оно содержит хотя бы одну угловую точку, 2) если нижняя грань функционала J_* конечна, то множество U_* оптимальных решений непусто, 3) если множество U_* оптимальных решений непусто, то оно содержит по крайней мере одну угловую точку множества U .*

Вывод: решать задачу ЛП программирования можно перебором угловых точек (вершин) канонического многогранника U . Одним из целенаправленных способов такого перебора, обеспечивающим монотонное невозрастание функционала $J(u)$, является симплекс-метод. Для его реализации нужна стартовая угловая точка (вершина) канонического многогранника U и правило распознавания угловых точек.

Алгебраический критерий для распознавания угловых точек содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть U – канонический многогранник вида (1), A_j , $j = 1, 2, \dots, n$, – столбцы матрицы A и ранг матрицы A равен $r \geq 1$. Тогда для того, чтобы точка $v \in U$ была угловой точкой множества U , необходимо и достаточно, чтобы равенство $Au = b$ из определения множества U выполнялось в виде*

$$A_{j_1}v_{j_1} + \dots + A_{j_r}v_{j_r} = b, \quad (2)$$

причем столбцы A_{j_i} , $i = 1, 2, \dots, r$, обязательно являются базисными для матрицы A , а не представленные в (2) координаты точки v обязательно равны нулю.

Найти стартовую угловую точку канонического многогранника U можно методом *искусственного базиса*. Для этого рассматривается следующая вспомогательная каноническая задача ЛП в пространстве переменных $z = (x, u) \in R^{m+n}$, где m – количество строк матрицы A :

$$g(z) = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \inf, \quad z \in Z = \{z \geq 0, \quad x + Au = b\}. \quad (3)$$

Без ограничения общности компоненты вектора b можно считать неотрицательными: $b \geq 0$. Тогда по теореме 2 точка $z_0 = (x = b, u = 0)$ является *угловой* точкой канонического многогранника Z . Из этой точки z_0 можно запустить симплекс-метод (с антициклином) и он за конечное число шагов найдет решение $z_* = (x_*, u_*)$ задачи (3), которое существует в силу теоремы 1, так как $g_* = \inf_{z \in Z} g(z) \geq 0$. При этом

$$g_* = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U \neq \emptyset,$$

а компонента u_* будет *угловой* точкой канонического многогранника U , из которой и запускается симплекс-метод в исходной задаче (1).

На каждом шаге симплекс-метода обрабатывается очередная угловая точка $v \in U$. Этой точке по теореме 2 соответствует *базисный* набор столбцов матрицы A с *базисными* номерами

$$J_b = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}.$$

Оставшиеся координаты объединяются в набор *свободных* номеров $J_f = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J_b$. Переменные $u_b = (u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_r})$ объявляются *базисными*, а остальные $n - r$ переменных u_f – *свободными*. Затем в задаче (1) исключаются базисные переменные и она превращается в (*неканоническую*) задачу ЛП меньшей размерности:

$$j(u_f) = J(v) - \sum_{k \in J_f} \Delta_k u_k \rightarrow \inf, \quad u_f \geq 0, \quad u_b \geq 0. \quad (4)$$

Неканоническими в задаче (4) являются ограничения $u_b \geq 0$ на исключенные базисные переменные. Далее, выбираются номера свободных переменных, перспективных в плане убывания функционала:

$$J_f^+ = \{k \in J_f \mid \Delta_k > 0\}.$$

Если оказалось, что $J_f^+ = \emptyset$, то никакой возможности уменьшить значения функционала нет, процесс останавливается, а искомое решение найдено: $v \in U_*$, $J_* = J(v)$.

Если $J_f^+ \neq \emptyset$, то выбирается некоторый номер $k \in J_f^+$ и принимается решение варьировать только одну свободную переменную u_k , а остальным свободным переменным присваиваются нулевые значения. Во избежание за-
цикливания симплекс-метода можно использовать известное *правило Блэнда*, упорядочивающее выбор номеров в случае их неединственности:

$$k = \min_{j \in J_f^+} j .$$

При этом задача (4) превращается в *одномерную* задачу минимизации:

$$j(u_k) = J(v) - \Delta_k u_k \rightarrow \inf, \quad u_k \geq 0, \quad u_b \geq 0. \quad (5)$$

Если оказалось, что в задаче (5) условия $u_b \geq 0$ на самом деле никаких ре-
альных ограничений сверху на переменную u_k не содержат, то процесс оста-
навливается с неутешительным выводом: решения у задачи (1) не существует,
 $J_* = -\infty$, $U_* = \emptyset$.

Остаётся рассмотреть возможность, когда $J_f^+ \neq \emptyset$ и для выбранного но-
мера $k \in J_f^+$ условия $u_b \geq 0$ в (5) ограничивают значения u_k сверху. Сами
условия $u_b \geq 0$ представляют собой систему неравенств вида

$$\gamma_{ik} u_k \leq v_{j_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где $(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}) = v_b$ — базисные координаты угловой точки v . Реальные
ограничения на u_k накладывают те из неравенств, в которых коэффициенты
 $\gamma_{ik} > 0$, поэтому в расчёт принимаются именно они, формируется соответ-
ствующий набор номеров

$$I_k^+ = \{i \in \{1, 2, \dots, r\} \mid \gamma_{ik} > 0\}$$

и находится решение одномерной задачи (5):

$$u_k = \min_{i \in I_k^+} \frac{v_{j_i}}{\gamma_{ik}}. \quad (6)$$

После этого, используя найденное в (6) значение u_k , осуществляется пере-
ход от имеющейся угловой точки v к угловой точке w . При формировании
нового набора *базисных* номеров $J_b = J_b(w)$, соответствующего точке w , со-
ставляется список I_{k*}^+ из номеров, на которых реализуется минимум в (6):

$$I_{k*}^+ = \left\{ p \in I_k^+ \mid \frac{v_{j_p}}{\gamma_{pk}} = \min_{i \in I_k^+} \frac{v_{j_i}}{\gamma_{ik}} \right\},$$

и из этого списка выбирается некоторый конкретный номер $s \in I_{k*}^+$. Чтобы избежать заикливания симплекс-метода, номер s можно выбирать по *правилу Блэнда*, а именно:

$$s = \min_{p \in I_{k*}^+} p.$$

После этого из базисного набора номеров $J_b(v)$ угловой точки v исключается номер j_s и добавляется номер k :

$$J_b(w) = J_b(v) \setminus \{j_s\} \cup \{k\}.$$

По построению $J(w) \leq J(v)$. Строгое убывание $J(w) < J(v)$ гарантировано в случае *невыврожденной* угловой точки v , все базисные координаты которой *положительны*: $v_j > 0 \ \forall j \in J_b$. Если угловая точка v вырождена, не исключено "топтание на месте": $J(w) = J(v)$, $w = v$, но в любом случае симплекс-метод в сочетании с антициклином Блэнда за конечное число шагов остановится либо в угловой точке v , являющейся решением задачи (1): $J_* = J(v)$, $v \in U_*$, либо распознает, что у задачи (1) решений нет: $J_* = -\infty$, $U_* = \emptyset$.

Разумеется, для решения задач ЛП с *неточными данными* нужно подключать дополнительные регуляризирующие процедуры (в лекционном курсе эти проблемы не рассматривались).